[2018 解答]

$\boxed{A2}$ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3} \leqq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ …① $3(x-3a) \leqq 2(x-4a)+6$ …②

(1) ①の両辺に12をかける.

$3x + 4 \leqq 8x - 6$

$-5x \leqq -10$

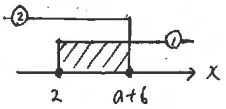
$\underline{x \geqq 2}$

(2) ②を解く.

$3x - 9a \leqq 2x - 8a + 6$

$\underline{x \leqq a + 6}$

・①と②をともに満たすxが存在するには,



$2 \leqq a + 6$

$a + 6 \geqq 2$

$\underline{a \geqq -4}$

(3) $a > -2$

$\frac{a}{6} < \frac{x-1}{3} < \frac{a}{2} + \frac{2}{3}$ …③

辺々に6をかける

$a < 2x - 2 < 3a + 4$

$\downarrow +2 \quad \downarrow +2 \quad \downarrow +2$

$a + 2 < 2x < 3a + 6$

$\downarrow \div 2 \quad \downarrow \div 2 \quad \downarrow \div 2$

$\frac{a+2}{2} < x < \frac{3a+6}{2}$

$a > -2$ より,

$\frac{a+2}{2} < \frac{3(a+2)}{2}$ であるから, これが解である.

$\underline{\frac{a+2}{2} < x < \frac{3a+6}{2}}$

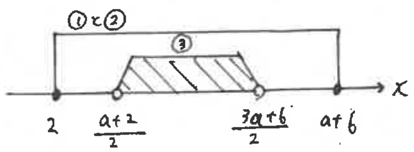
Point!

両辺に文字をかける(割る)時には細心の注意を.

・0で割っていないか?

・(不等式なら) 正の数か負の数か?

・③を満たすすべてのxが, ①と②をともに満たすには,



$2 < \frac{a+2}{2}$ なのか, $2 \leqq \frac{a+2}{2}$ なのか,

境界となる値を含んでよいかどうかは,

必ず個別に条件を満たすかチェック!!

$2 \leqq \frac{a+2}{2}$ かつ $\frac{3a+6}{2} \leqq a + 6$

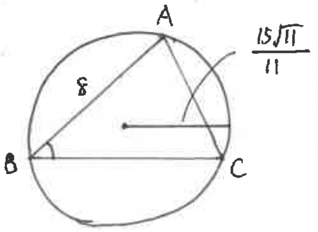
$4 \leqq a + 2$ 　　$3a + 6 \leqq 2a + 12$

$2 \leqq a$ 　　$a \leqq 6$

よって, $\underline{2 \leqq a \leqq 6}$ これは, $a > -2$ を満たす.

$\boxed{A3}$ $\cos\angle ABC = \frac{5}{6}$、 $AB = 8$、 外接円の半径は $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ 　 $BC > AB$

(1)



$$\sin^2\angle ABC + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\angle ABC = \frac{11}{36}$$

$0° < \angle ABC < 180°$ より、 $\sin\angle ABC > 0$

よって、 $\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{11}}{6}$

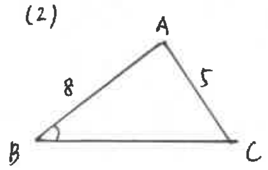
△ABCにおいて正弦定理より、

$$\frac{AC}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = 2\cdot\frac{15\sqrt{11}}{11}$$

$$AC = 2\cdot\frac{15\sqrt{11}}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\underline{AC = 5}$$

(2)



△ABCにおいて余弦定理より、

$$5^2 = 8^2 + BC^2 - 2\cdot 8\cdot BC\cdot\frac{5}{6}$$

$$0 = BC^2 - \frac{80}{3}BC + 39$$

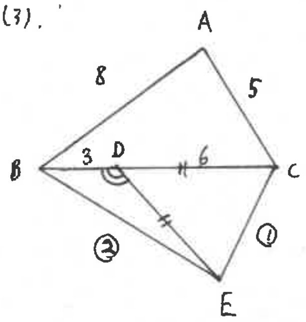
$$3BC^2 - 80BC + 117 = 0$$

$$(3BC - 13)(BC - 9) = 0$$

$BC > AB$ より、 $BC > 8$ から、

$$\underline{BC = 9}$$

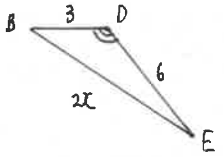
(3)



$[BD = 3 \ (DC = 6)$、 $BE : CE = 2 : 1$、 $DE = 6]$

$CE = x$ とおく、 $BE = 2x$ である。

ここで、 $\angle BDE = \theta$ とおくて、 $\angle CDE = 180° - \theta$



△BDEにおいて余弦定理より、

$$(2x)^2 = 3^2 + 6^2 - 2\cdot 3\cdot 6\cdot\cos\theta$$

$$4x^2 = 45 - 36\cos\theta$$

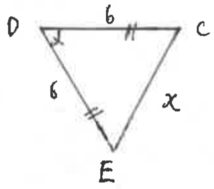
$$8x^2 = 90 - 72\cos\theta$$

△DCEにおいて余弦定理より、

$$x^2 = 6^2 + 6^2 - 2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos(180° - \theta)$$

$$x^2 = 72 - 72\cdot(-\cos\theta)$$

$$x^2 = 72 + 72\cos\theta$$



よって、

$$\begin{aligned} 8x^2 &= 90 - 72\cos\theta \\ +)\quad x^2 &= 72 + 72\cos\theta \\ \hline 9x^2 &= 162 \\ x^2 &= 18 \end{aligned}$$

$x > 0$ より、

$$x = 3\sqrt{2}$$

ゆえに、 $\underline{CE = 3\sqrt{2}}$ 　 $BE = 6\sqrt{2}$

たして180°、たして90°になる角の三角比の性質は、使いこなせないと損するぞ。

$\sin(90° - \theta) = \sin\theta$ 　 $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 　 $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$ 　 $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

また、

$$x^2 = 72 + 72\cos\theta$$

$$18 = 72 + 72\cos\theta$$

$$-54 = 72\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-54}{72} = -\frac{3}{4}$$

したがって、

$$\underline{\cos\angle BDE = -\frac{3}{4}}$$

$\boxed{A4}$ $f(x) = x^2 - 2ax - a^2 + 3a + 5$

$= \{(x-a)^2 - a^2\} - a^2 + 3a + 5$

$= (x-a)^2 - 2a^2 + 3a + 5$　　頂 $(a,\ -2a^2+3a+5)$

(1) $a=1$ のとき，頂点の x 座標は $a=1$

y 座標は $-2a^2+3a+5 = -2+3+5 = 6$　　$\underline{(1,\ 6)}$

x 軸との位置関係は
① 頂点の y 座標
② 判別式
どちらもできるように

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる2点で交わるのは，下に凸のグラフより，頂点の y 座標が0より小さいとき．

よって，

$-2a^2+3a+5 < 0$

$2a^2-3a-5 > 0$

$(2a-5)(a+1) > 0$

$\underline{a<-1,\ \frac{5}{2}<a}$

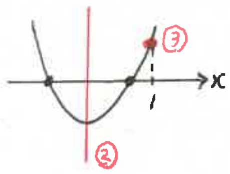
[別 $x^2-2ax-a^2+3a+5=0$ の判別式を D とすると，

$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1\cdot(-a^2+3a+5) > 0$

$2a^2-3a-5 > 0$

$a<-1,\ \frac{5}{2}<a$]

(3) $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<1$ の部分が異なる2点で交わるとき，次の条件を考えればよい．



① 判別式 $[D>0]$　((頂点の y 座標) <0 でもよい)

② 軸の位置　[(軸) <1]

③ 区間の端での y 座標の正負　[$x=1$ のとき，$y>0$]

①は，(2)より　$a<-1,\ \frac{5}{2}<a$

②は，軸が $x=a$ より　$a<1$

③は，$x=1$ のとき，$y = 1-2a-a^2+3a+5$

$= -a^2+a+6$

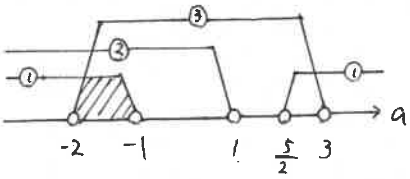
よって，$-a^2+a+6 > 0$

$a^2-a-6 < 0$

$(a+2)(a-3) < 0$

$-2<a<3$

①，②，③より，

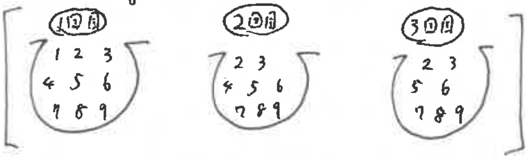


$\underline{-2<a<-1}$

A6

(1) 1回目に①を取り出すのは $\frac{1}{9}$、2回目に④を取り出すのは $\frac{1}{8}$、3回目に⑦を取り出すのは $\frac{1}{7}$の確率だから、

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{504}}$$



(2)．3回の操作で①,④,⑦を取り出す取り出し方は、①,④,⑦の並べ方の総数 3! 通り だけあり、
どの場合も確率は $\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}$ であるから、

$$3!\times\left(\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}\right)=6\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{84}}$$

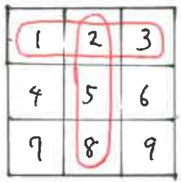
$\left(\frac{3!}{{}_9P_3}\text{ でも可}\right)$

・3回の操作で3回目に②を取り出して終了するのは、

[1] 1,2回目で①と③、3回目で② ⇒ 2! 通り

[2] 1,2回目で⑤と⑧、3回目で② ⇒ 2! 通り

確率はいずれも $\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}$



よって、求める確率は、

$$2!\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}+2!\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{126}}$$

(3)．3回の操作で3回目に⑤を取り出して終了するのは、

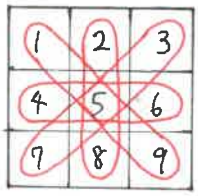
[1] 1,2回目で①と⑨、3回目で⑤

[2] 1,2回目で③と⑦、3回目で⑤

[3] 1,2回目で②と⑧、3回目で⑤

[4] 1,2回目で④と⑥、3回目で⑤

⇒ それぞれ 2! 通り



求める確率は、

$$4\times2!\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\underline{\frac{1}{63}}$$

・このとき、1回目に①を取り出していた確率は、

[1](i) 1回目に①、2回目に⑨、3回目に⑤

$$\frac{1}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{504}$$

したがって、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{1}{504}}{\frac{1}{63}}=\frac{63}{504}=\underline{\frac{1}{8}}$$