[2016 解答]

$\boxed{A2}$ $a^2=2-\sqrt{3}$, $b^2=\dfrac{1}{a^2}$ (a, bは正の数)

(1) $b^2=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\underline{2+\sqrt{3}}$

$a^2+b^2=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=\underline{4}$

(2) $b^2=\dfrac{1}{a^2}$ の両辺に a^2 をかけると.

$a^2b^2=1$

$(ab)^2=1$

$ab=\pm1$

a, bは正の数から. $ab>0$ より,

$ab=\underline{1}$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=\underline{a^2+b^2}+2ab$

$=4+2$

$=6$

$a+b>0$ より, $\underline{a+b=\sqrt{6}}$

Point!

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

  $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

  [※ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ の因数分解も大事.]

  の式変形は必ずできるように!

- 分数は通分してみよう.

(3) $a+\dfrac{1}{a}=x$, $b+\dfrac{1}{b}=y$

$xy=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$

$=ab+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ab}$

$=ab+\dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{b^2}{ab}+\dfrac{1}{ab}$

$=ab+\dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{1}{ab}$

$=1+\dfrac{4}{1}+1$

$=\underline{6}$

$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{y^2}{x^2y^2}+\dfrac{x^2}{x^2y^2}$

$=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^2}$

ここで, $x+y=a+\dfrac{1}{a}+b+\dfrac{1}{b}$

$=a+b+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 通分してみよう.

$=a+b+\dfrac{a+b}{ab}$

$=\sqrt{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{1}$

$=2\sqrt{6}$

ゆえに,

$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^2}$

$=\dfrac{(2\sqrt{6})^2-2\cdot6}{6^2}$

$=\dfrac{24-12}{36}$

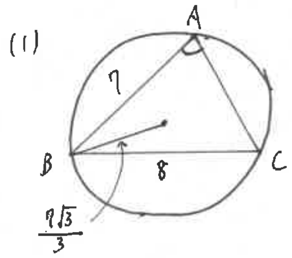
$=\dfrac{12}{36}$

$=\underline{\dfrac{1}{3}}$

A3 $AB=7$, $BC=8$ の鋭角三角形ABC、外接円 O_1 の半径は $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

2点B, Cを通る円 O_2 があり、円 O_2 の中心が円 O_1 の点Aを含まない弧BC上にある。

(1)



$\sin\angle BAC$ の値を求める。

$\triangle ABC$ において正弦定理より、

$$\frac{8}{\sin\angle BAC} = 2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

$$8 = \frac{14\sqrt{3}}{3}\times\sin\angle BAC$$

$$8\cdot\frac{3}{14\sqrt{3}} = \sin\angle BAC$$

$$\frac{12}{7\sqrt{3}} = \sin\angle BAC$$

$$\sin\angle BAC = \frac{12\sqrt{3}}{7\cdot 3} = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

外接円の半径 → 正弦定理
内接円の半径 → 面積
をまず思い浮かべよう!

(2). ACの長さ、O_2 の半径

(1)より、$\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \cos^2\angle BAC = 1$

$$\cos^2\angle BAC = 1 - \frac{48}{49}$$

$$\cos^2\angle BAC = \frac{1}{49}$$

$0° < \angle BAC < 180°$ から $\cos\angle BAC > 0$ より、 $\cos\angle BAC = \frac{1}{7}$

Point!

- 三角比の相互関係はいつでも使える
- 三角形でわかっているものと求めたいものを合わせて、
  - ① 2辺と2角 → 正弦定理
  - ② 3辺と1角 → 余弦定理

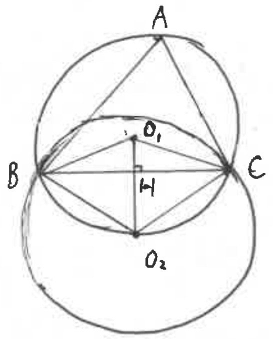
よって、$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$8^2 = 7^2 + AC^2 - 2\cdot 7\cdot AC\cdot\frac{1}{7}$$

$$0 = AC^2 - 2AC - 15$$

$$(AC-5)(AC+3) = 0$$

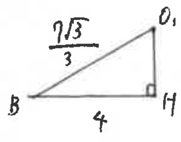
$AC > 0$ より、 $\underline{AC = 5}$



円 O_1, O_2 の中心を点 O_1, O_2 とする。

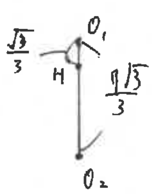
線分 O_1O_2 は、円の弦BCを垂直に二等分する。

O_1O_2 とBCの交点をHとすると、$BH=CH=4$、$O_1O_2 = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

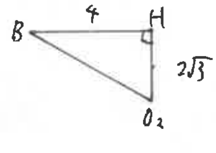


$\triangle O_1BH$ で三平方の定理を用いると、

$$O_1H = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{\frac{49}{3} - 16} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$O_2H = \frac{7\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

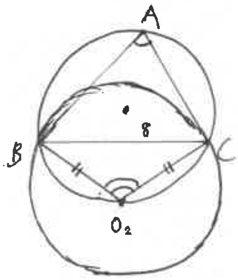


$\triangle O_2BH$ で三平方の定理を用いると、

$$O_2B = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

O_2B は円 O_2 の半径であるから、求める長さは $\underline{2\sqrt{7}}$

[O_2の半径を求める別解]（※面倒な補助線なし）



四角形ABO_2Cは円に内接する四角形であるから、

$$\cos\angle BO_2C = -\cos\angle BAC = -\frac{1}{7}$$

$O_2B = O_2C = R_2$ とおくと、R_2は円O_2の半径

$\triangle O_2BC$において余弦定理より、

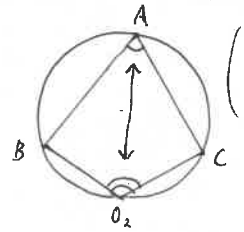
$$8^2 = R_2^2 + R_2^2 - 2\cdot R_2\cdot R_2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$64 = 2R_2^2 + \frac{2}{7}R_2^2$$

$$64 = \frac{16}{7}R_2^2$$

$$R_2^2 = 28$$

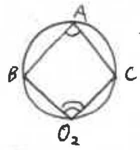
$R_2 > 0$より、 $\underline{R_2 = 2\sqrt{7}}$



Point!

円に内接する四角形は頻出!!
あらゆる図形の性質を頭に入れておこう。

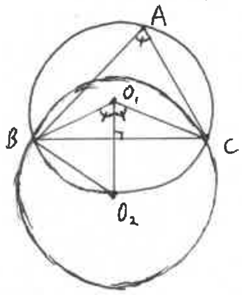
特に忘れがちなのは



$\sin A = \sin O_2$

$\cos A = -\cos O_2$

[O_2の半径を求める別解②]（※図形の性質をうまく利用）



線分O_1O_2は、$\angle BO_1C$を二等分する。 $\angle BO_1O_2 = \angle CO_1O_2$

また、円周角の定理より、$\angle BO_1C = 2\angle BAC$

$$\angle BO_1O_2 + \angle CO_1O_2 = 2\angle BAC$$

よって、 $\angle BO_1O_2 = \angle BAC$

ゆえに、 $\cos\angle BO_1O_2 = \frac{1}{7}$

$\triangle BO_1O_2$において余弦定理より、

$$(BO_2)^2 = (O_1B)^2 + (O_1O_2)^2 - 2\cdot(O_1B)\cdot(O_1O_2)\cdot\frac{1}{7}$$

$$= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{7}$$

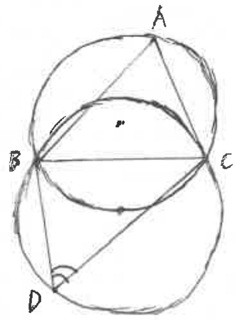
$$= \frac{12}{7}\cdot\frac{49}{3}$$

$$= 28$$

$BO_2 > 0$より、 $BO_2 = 2\sqrt{7}$

したがって、円O_2の半径は$\underline{2\sqrt{7}}$

(3) BDの長さ（∠BCDは鋭角、$BD:CD=\sqrt{3}:\sqrt{7}$）、$\frac{DE}{AE}$の値.

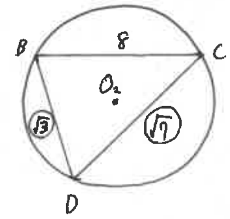


△BDCにおいて正弦定理より,

$$\frac{8}{\sin\angle BDC}=2\cdot 2\sqrt{7}$$

$$\frac{8}{4\sqrt{7}}=\sin\angle BDC$$

$$\sin\angle BDC=\frac{2}{\sqrt{7}}$$



$\cos\angle BDC>0$より,

$$\cos\angle BDC=\sqrt{1-\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$BD:CD=\sqrt{3}:\sqrt{7}$より、$BD=\sqrt{3}x$, $CD=\sqrt{7}x$ とする.

△BDCにおいて余弦定理より,

$$8^2=(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{7}x)^2-2(\sqrt{3}x)\cdot(\sqrt{7}x)\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}$$

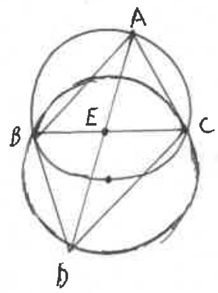
$$64=10x^2-6x^2$$

$$64=4x^2$$

$$x^2=16$$

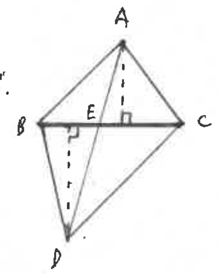
$x>0$より, $x=4$

よって, $\underline{BD=4\sqrt{3}}$, $CD=4\sqrt{7}$



△ABCと△DBCは, 底辺BCを共有しているので,
面積比は高さの比と一致する. 高さの比はAE:DEに等しいので,

$$AE:DE=\triangle ABC:\triangle DBC$$



△ABCの面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 5\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$$

△DBCの面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=16\sqrt{3}$$

よって, $AE:DE=10\sqrt{3}:16\sqrt{3}$

$$=10:16$$

$$=5:8$$

したがって, $\underline{\frac{DE}{AE}=\frac{8}{5}}$

辺の比で使えそうなもの
- チェバの定理
- メネラウスの定理
- 面積比

⋮

決めつけないこと!!

$\boxed{A4}$ $f(x) = ax^2 - 2ax + a^2 - 20 \quad (a \neq 0)$

(1) $a = -1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -x^2 + 2x - 19. \\
&= -(x^2 - 2x) - 19 \\
&= -\{(x-1)^2 - 1\} - 19 \\
&= -(x-1)^2 - 18
\end{aligned}
$$

頂 $(1, -18)$

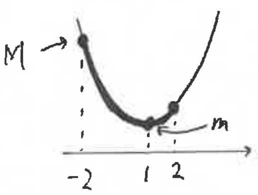
(2) $a > 0$, $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値 M, 最小値 m, $M - 2m = 36$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 - 2ax + a^2 - 20 \\
&= a(x^2 - 2x) + a^2 - 20 \\
&= a\{(x-1)^2 - 1\} + a^2 - 20 \\
&= a(x-1)^2 + a^2 - a - 20
\end{aligned}
$$

頂 $(1, a^2 - a - 20)$

文字を含む平方完成、必ずできるように。できない人は死にものぐるいで練習すること。

$a > 0$ より、



$M = f(-2) = 4a + 4a + a^2 - 20 = a^2 + 8a - 20$

$m = f(1) = a^2 - a - 20$

Max, minは、グラフでセットで考えよう。簡単でいいので書くと良い

$M - 2m = 36$ より、

$$
\begin{aligned}
(a^2 + 8a - 20) - 2(a^2 - a - 20) &= 36 \\
-a^2 + 10a - 16 &= 0 \\
a^2 - 10a + 16 &= 0 \\
(a-2)(a-8) &= 0
\end{aligned}
$$

$a = 2, 8$

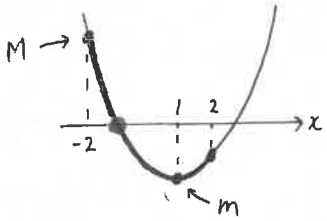
(3) $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分と共有点をもつ。

$f(x) = a(x-1)^2 + a^2 - a - 20$ 頂 $(1, a^2 - a - 20)$

軸も定義域も動かないので、Max、minを考えると非常に楽ですね。授業や課外で紹介できていなかったパターンなので、難しかったと思います。すみません。

[1] $a > 0$ のとき、

グラフは次のようになる。



条件を満たすには、

$M \geqq 0$ かつ $m \leqq 0$ であればよい。

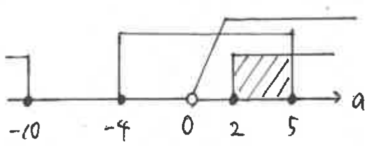
よって、 $M = f(-2) = a^2 + 8a - 20$

$m = f(1) = a^2 - a - 20$ より、

$a^2 + 8a - 20 \geqq 0$ かつ $a^2 - a - 20 \leqq 0$

$(a+10)(a-2) \geqq 0$ $\qquad (a-5)(a+4) \leqq 0$

$a \leqq -10,\ 2 \leqq a$ $\qquad -4 \leqq a \leqq 5$

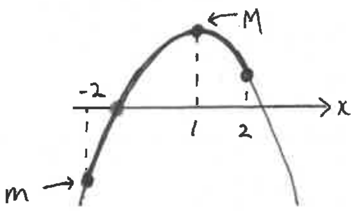


したがって、

$2 \leqq a \leqq 5$

[2] $a<0$ のとき，

グラフは次のようになる．



条件を満たすには，

$M \geqq 0$ かつ $m \leqq 0$ であればよい．

よって

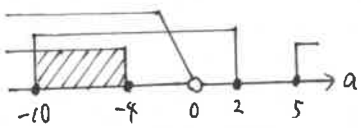
$M=f(1)=a^2-a-20$

$m=f(-2)=a^2+8a-20$

$a^2-a-20 \geqq 0$ かつ $a^2+8a-20 \leqq 0$

$(a+4)(a-5) \geqq 0$ 　 $(a+10)(a-2) \leqq 0$

$a \leqq -4,\ 5 \leqq a$ 　 $-10 \leqq a \leqq 2$



したがって，

$-10 \leqq a \leqq -4$

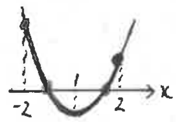
[1]，[2] より，　$-10 \leqq a \leqq -4,\ 2 \leqq a \leqq 5$

[(3)の別解]

$-2 \leqq x \leqq 2$ において x 軸と共有点をもつとき，次のように場合分けする．

[1] $a>0$ のとき，

① 共有点を2つもつ



1 頂点の y 座標

$a^2-a-20<0$

$-4<a<5$

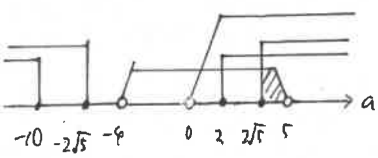
2 軸は $x=1$ より良い

3 $f(-2) \geqq 0$ かつ $f(2) \geqq 0$

$a^2+8a-20 \geqq 0$ かつ $a^2-20 \geqq 0$

$a \leqq -10,\ 2 \leqq a$ ， $a \leqq -2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5} \leqq a$

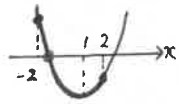
1〜3 かつ $a>0$ より，



$2\sqrt{5} \leqq a \leqq 5$

② 共有点を1つもつ

(i) $-2<x<1$ の間

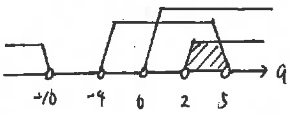


$f(-2)>0$ かつ $f(1)<0$

$a^2+8a-20>0$ ， $a^2-a-20<0$

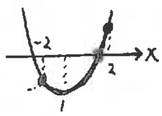
$a<-10,\ 2<a$ ， $-4<a<5$

よって，



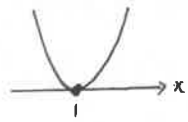
$2<a<5$

(ii) $1<x<2$ の間



軸から $x=-2,\ 2$ までの距離を考えるとありえない．

(iii) 頂点

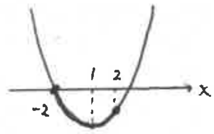


$a^2-a-20=0$

$a>0$ より，

$a=5$

(iv) $x=-2$

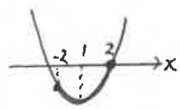


$a^2+8a-20=0$

$a>0$ より，

$a=2$

(v) $x=2$



(ii)と同様不適．

①，②すべてを合わせると，　$2 \leqq a \leqq 5$

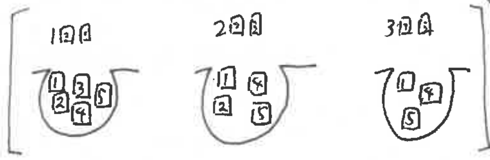
[2] $a<0$ のときも同様に考えると，

$-10 \leqq a \leqq -4$

$\boxed{\text{A6}}$

(1) 1回目に$\boxed{3}$、2回目に$\boxed{2}$、3回目に$\boxed{1}$を取り出せばよい。

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\underline{\frac{1}{60}}$$



Point!
戻したり戻さなかったりするので「同様に確からしい」ではない。
そのため、
$\dfrac{\text{求めたい場合の数}}{\text{全体の場合の数}}$
としないように!!

(2) ・$\boxed{1}$だけ。

→1回目に$\boxed{1}$、2回目に$\boxed{2}$以外、3回目に$\boxed{2}$以外を取り出せばよい。

$$\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\underline{\frac{9}{80}}$$

・$\boxed{2}\boxed{1}$の2枚

① 1回目に$\boxed{2}$、2回目に$\boxed{1}$、3回目はどれでもよい

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{1}{20}$$

② 1回目に$\boxed{2}$、2回目に$\boxed{1}$と$\boxed{3}$以外、3回目に$\boxed{1}$

$$\frac{1}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{40}$$

よって、$\frac{1}{20}+\frac{1}{40}=\underline{\frac{3}{40}}$

(3) ・最後に机に置いたカードが$\boxed{1}$

$\underbrace{\text{パターン}}_{\text{条件を満たす}}$は、(1)(2)で求めたこの3つのみであるから、

$$\frac{1}{60}+\frac{9}{80}+\frac{3}{40}=\frac{4}{240}+\frac{27}{240}+\frac{18}{240}=\underline{\frac{49}{240}}$$

・条件付き確率

机に置いたカードが$\boxed{1}$だけである確率は $\frac{9}{80}$ より、

$$\frac{\frac{9}{80}}{\frac{49}{240}}=\frac{9}{80}\cdot\frac{240}{49}=\underline{\frac{27}{49}}$$

いかがでしたか？ 問題を解ききることができていたでしょうか。
自分の解答と見比べてみて、どこまで自分が解けていて、どこから
わかっていないのかを確かめてみましょう。
また、解答をよく理解することも大切です。特に注意して確認して
ほしいのは、

- なぜこの記述があるのか
- 書かれている式はどういう考え方からきたのか
- どうして解答のように考えているのか

です。答えが合っているかでなく、適切な記述ができているか、あるいは
記述してあることの意味を理解できているかまで考えてください。

また、書いてある解答以外にも多くの別解が考えられます。自分の解答が
数学的に正しいかどうか、よく考えてみることも大切ですね。

文章を読む力も大切ですね。問題を正しく読み取る、解答を正確に理解する、この
機にじっくり力をつけていってください。

さて、この解答がアップされている頃には、もう課題も終わり、予習や自分で
持っている参考書などにももう手を出し尽くしてしまって、やることがなくなって
しまっている人がほとんどだと思います。そんな人のために、問題を6問
用意しました。難易度がとても高いわけではなく（むしろ簡単なものも）、しかし
やりごたえがあったり数学的に面白かったりするものを集めてきました。
みなさんの挑戦、待ってます。解答は載せません（ヒントはありますが）ので、
やってきた人（一部分でも可）、分からなくて聞きたいことがある人は、学校に来た
時に関の所に来てください。添削いたします。

それでは、引き続き努力を重ねていってください。